La Réunion

1. Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$ par $f(x)=1-x^2e^{1-x^2}$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Sa courbe représentative C et son asymptote Δ, d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A -Lecture graphique

1. k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$ de l'équation $f(x) = k$.

2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0\ ;\ 1]$ et $[1\ ;\ +\infty\ [$.

2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et w_n pour n appartenant à l'ensemble $\{2\ ;\ 3\ ;4\}$.

3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. Procéder de même pour la suite (v_n). En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$; i désigne le nombre complexe demodule 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1+i$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{iz+2}{z-i}$.

1. a. Déterminer les images de B et de C par l'application f.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation $(z'-i)(z-i)=1$.

c. Soit D le point d'affixe $1+2i$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm). Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l' application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif. Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. a. Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

b. Soit Δ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer l' image de la droite Δ privée du point A par l'application f.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1(p)$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1(p)$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1(p)$.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1(p)$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1(p)$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1(p)$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1. que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1(2q)$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

4. Exercice 4 (5 points)

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, contenant 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

A : $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$	**B** : $\dfrac{3}{120}$	**C** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6000}\right)^3\times\left(\dfrac{5880}{6000}\right)^7$	**D** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5880}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

A : 0,98	**B** : $\dfrac{0,4\times0,95}{0,6\times0,98+0,6\times0,02}$	**C** : $0,6\times0,98$	**D** : $\dfrac{0,6\times0,98}{0,6\times0,98+0,4\times0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot ménager jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0005$).

Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est : $p([0\,;t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**B** : $e^{\frac{5}{4}}$	**C** : $1-e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**D** : $e^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule $E=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a. L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ est égale à :

A : $\lambda\dfrac{t^2}{2}e^{-\lambda t}$	**B** : $-te^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$	**C** : $\lambda te^{-\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}-\lambda$	**D** : $te^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500	**B** : 2 000	**C** : 2531,24	**D** : 3 000

5. Exercice 4 (6 points)

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout nombre réel x, $(f'(x))^2-(f(x))^2=1$.

(2) $f'(0)=1$

(3) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) Pour tout nombre réel x, $f''(x)=f(x)$.

où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.

3. On pose $u=f'+f$ et $v=f'-f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. a. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x)=m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer cette solution lorsque $m=3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

Annexe : courbe de l'exercice 1.