Baccalauréat session de remplacement — National

1. Exercice 1 (4 points)

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$: $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\displaystyle\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

2. Exercice 2 (6 points)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y=y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. La courbe (C) représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de h ; retrouver les variations de h. Déterminer les valeurs exactes de x_0 et $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)=\lambda$.

Ainsi le couple (a,b) est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1\,;e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

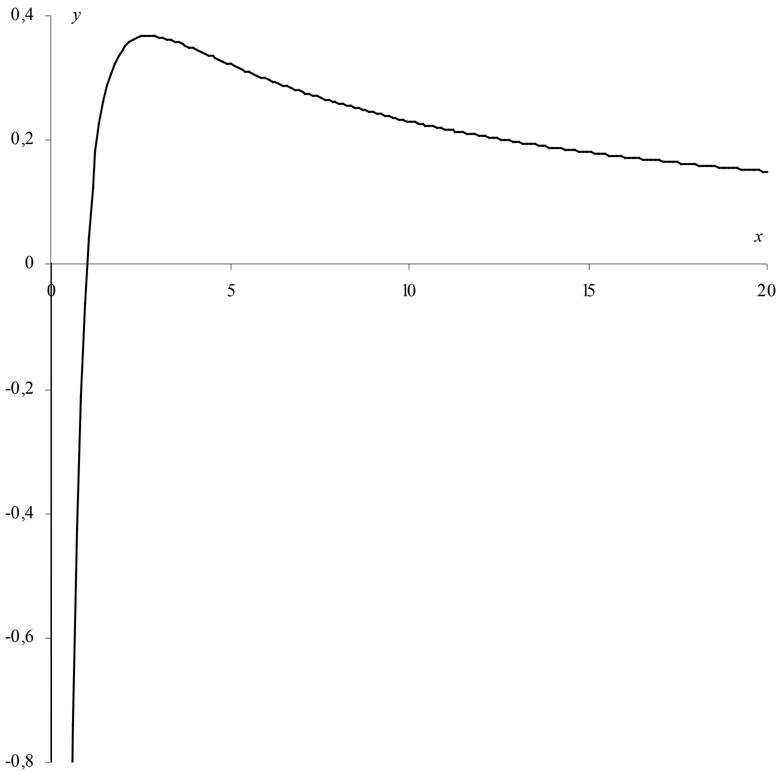
a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

A rendre avec la copie.



3. Exercice 3 (5 points)

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;

C1 : « la particule entre dans K1 » ;

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède 5 fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B. On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t)=0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=4\sqrt{3}-4i$ et $b=4\sqrt{3}+4i$.

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c=-\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\,;-1)$, $(D\,;+1)$, $(B\,;+1)$.

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g=4\sqrt{3}+6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ. B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD. Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

[1] Temps au bout duquel le nombre de particulesrestantes est la moitié du nombre initial.

2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.

3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en C.

Partie B

Dans cette question le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et $+1$.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral directe ; on a donc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments carctéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproquie de s.

3. Montrer que l'image E' de E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.

4. On note Σ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C. Montrer que le point E appartient à Σ.

Soit O' l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de Σ.

A rendre avec la copie