Baccalauréat remplacement **Correction** **National**

1. Exercice 1 (4 points)

1. $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1)}$ d'où on tire par identification : $\begin{cases}a+b+c=0\\c-b=0\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=1\\c-b=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1/2\\c=1/2\\a=-1\end{cases}$. On a donc $g(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$.

b. $\displaystyle\int g(x)dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|\Rightarrow G(x)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$ (ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1\,;+\infty[$).

2. Pour trouver une primitive de $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, il suffit d'utiliser $\displaystyle\int u'u^n dx=\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $u=x^2-1$ et $n=-2$: $\displaystyle\int f(x)dx=\frac{1}{-2+1}(x^2-1)^{-2+1}=\frac{-1}{x^2-1}$.

3. A première vue (et même à seconde vue) il faut intégrer par parties :

$u=\ln x,\ v'=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\Rightarrow u'=\dfrac{1}{x},\ v=\dfrac{-1}{x^2-1}$,

ce qui donne

$$\begin{aligned}I=\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx&=\left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3+\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}dx\\&=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2+\left(-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 1\right)\\&=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{13}{8}\ln 3+\frac{17}{6}\ln 2.\end{aligned}$$

2. Exercice 2 (6 points)

1. (E) : $x^y=y^x\Leftrightarrow\ln(x^y)=\ln(y^x)\Leftrightarrow y\ln x=x\ln y\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$: pour la première égalité, ln est bijective, x et y sont strictement positifs ; la deuxième est une propriété de ln, le reste est du calcul.

2. a. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x=+\infty\times-\infty=-\infty$.

b. $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow\ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e=x_0$; $h(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$.

c. $h(x)=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

3. h **est continue, monotone strictement croissante** de $]1\,;e[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$ (voir les variations de h) ; il existe donc un unique réel a tel que $h(a)=\lambda$; de même h **est continue, monotone strictement décroissante** de $]e\,;+\infty[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$ (voir les variations de h) ; il existe donc un unique réel b tel que $h(b)=\lambda$ (sur chacun des intervalles considérés h est bijective, même si elle ne l'est pas globalement).

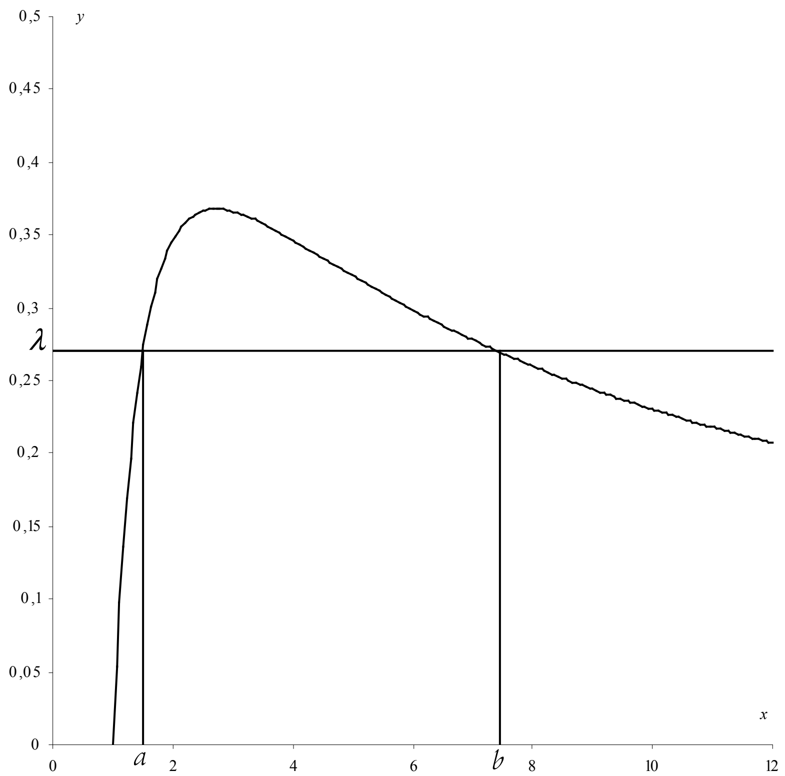
4. $s(a) = b$.

a. Quand a tend vers 1, λ tend vers 0, donc b tend vers $+\infty$.

b. Quand a tend vers e inférieurement, λ tend vers $1/e$, donc b tend vers e supérieurement.

c. Lorsque a varie de 1 à e, b varie de $+\infty$ à e, donc s est décroissante.

5. Entre 1 et e il n'y a que deux entiers : 1 et 2 ; pour $a = 1$, $b = +\infty$ … pour $a = 2$, b semble valoir 4. Vérifions en remplaçant dans (E) : $2^4 = 16, 4^2 = 16$ ok !



3. *Exercice 3 (5 points)*

Partie A

Interprétons les données en termes de probabilités : 75 % de particules A, soit $p(\text{A}) = 0,75$, et 25 % de particules B, soit $p(\text{B}) = 0,25$.

- A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$: $p_{\text{A}}(\text{K1}) = \frac{1}{3}$, dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$: $p_{\text{A}}(\text{K2}) = \frac{2}{3}$.

- B entre dans K1 ou K2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$: $p_{\text{B}}(\text{K1}) = \frac{1}{2}$, $p_{\text{B}}(\text{K2}) = \frac{1}{2}$.

1. $p(\mathrm{A1})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{K1})=p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K1})p(\mathrm{A})=\frac{1}{3}.0,75=\frac{1}{4}$; $p(\mathrm{A2})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{K2})=p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K2})p(\mathrm{A})=\frac{2}{3}.0,75=\frac{1}{2}$;

$p(\mathrm{B1})=p(\mathrm{B}\cap\mathrm{K1})=p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K1})p(\mathrm{B})=\frac{1}{2}.0,25=\frac{1}{8}$; $p(\mathrm{B2})=p(\mathrm{B}\cap\mathrm{K2})=p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K2})p(\mathrm{B})=\frac{1}{2}.0,25=\frac{1}{8}$;

$p(\mathrm{C1})=p((\mathrm{A}\cap\mathrm{K1})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{K1}))=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{K1})+p(\mathrm{B}\cap\mathrm{K1})=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$;

$p(\mathrm{C2})=p((\mathrm{A}\cap\mathrm{K2})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{K2}))=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{K2})+p(\mathrm{B}\cap\mathrm{K2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

Le total doit évidemment faire 1…

2. Loi binomiale, $B(5, 5/8)$; $p(2\text{ dans K2})=\binom{5}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^3\approx 0,206$.

Partie B

$p(t)=0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. A t = 5730, on a

$$0,75e^{-\lambda t}=\frac{1}{2}p(0)\Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda(5730)}=\frac{0,75}{2}\Leftrightarrow e^{-\lambda(5730)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\lambda(5730)=-\ln 2\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 2}{5730}\approx 0,00012097,$$

soit 0,00012 à 10^{-5} près par défaut.

2. On cherche t pour qu'il reste 90 % des particules de type A, soit $p(t)=\frac{90}{100}p(0)$, ce qui donne l'équation d'inconnue t : $0,75e^{-\lambda t}=0,9\times 0,75\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=0,9\Leftrightarrow -\lambda t=\ln(0,9)\Leftrightarrow t=\frac{\ln(0,9)}{-\lambda}=\frac{\ln(0,9)}{-0,00012}\approx 871\text{ ans}$.

3. Il y aura autant de particules de type A que de particules de type B lorsque les pourcentages de types A et B seront de 50 % chacun. En l'occurrence il faut que $p(t)=0,5$, ce qui donne

$$0,75e^{-\lambda t}=0,5\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=\frac{0,5}{0,75}\Leftrightarrow -\lambda t=\ln(2/3)\Leftrightarrow t=\frac{\ln(2/3)}{-\lambda}\approx 3352\text{ ans}.$$

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

1. $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$: $\Delta=64.3-4.64=-64=(8i)^2$ d'où $z_1=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$ ou $z_2=4\sqrt{3}-4i$.

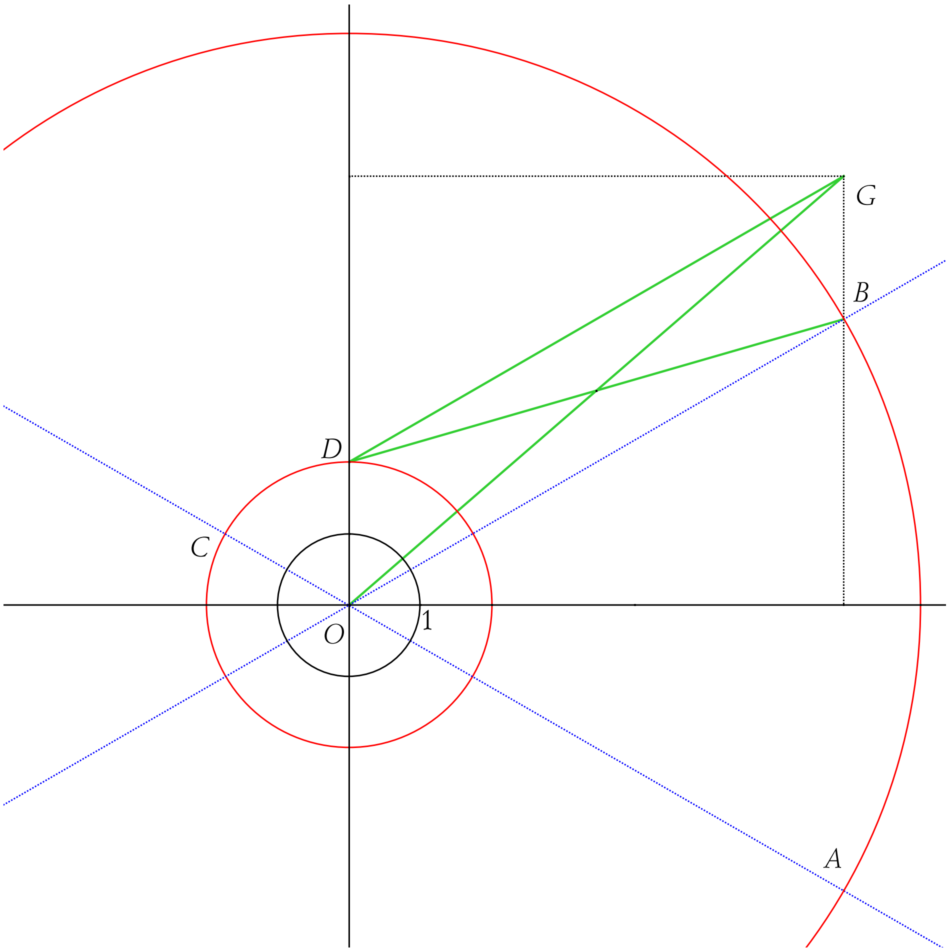
2. a. $a=4\sqrt{3}-4i=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $b=4\sqrt{3}+4i$. $b=4\sqrt{3}+4i=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. Il est immédiat que $OA=OB=8$; $AB=|b-a|=\left|4\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}+4i\right|=|8i|=8$. OAB est équilatéral.

3. $r:z\to z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z\Rightarrow d=e^{-i\frac{\pi}{3}}(-\sqrt{3}+i)=e^{-i\frac{\pi}{3}}2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i\frac{3\pi}{6}}=2i$ (on peut le faire évidemment en utilisant les coordonnées cartésiennes).

4. a. G : barycentre de (O ; −1), (D ; +1), (B ; +1) existe car la somme des coefficients n'est pas nulle. Son affixe est $z_G=\frac{1}{-1+1+1}(-1.z_O+1.z_D+1.z_B)=d+b=2i+4\sqrt{3}+4i=4\sqrt{3}+6i$.

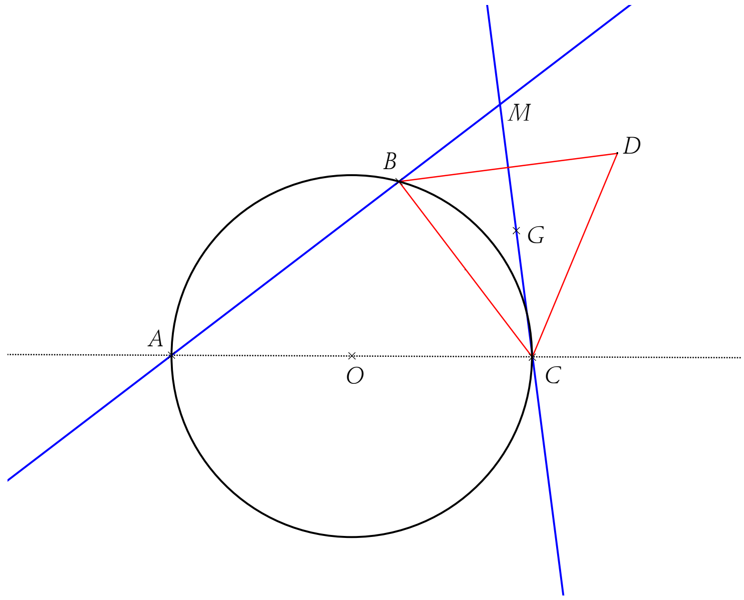
b. Il faut évidemment utiliser les formes trigo…



c. C, D et G sont alignés : $\overrightarrow{CD}$ a pour affixe $d-c=2i-(-\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i$ et $\overrightarrow{DG}$ a pour affixe $g-d=4\sqrt{3}+6i-2i=4\sqrt{3}+4i=4(d-c)$ donc $\overrightarrow{DG}=4\overrightarrow{CD}$.

d. Appelons K le milieu de $[BD]$, alors G est le barycentre de $(O\,;-1)$, $(K\,;2)$ d'où $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{-1+2}\overrightarrow{OK} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OK}$, donc K est le milieu de $[OG]$. Mêmes milieux donc parallélogramme.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

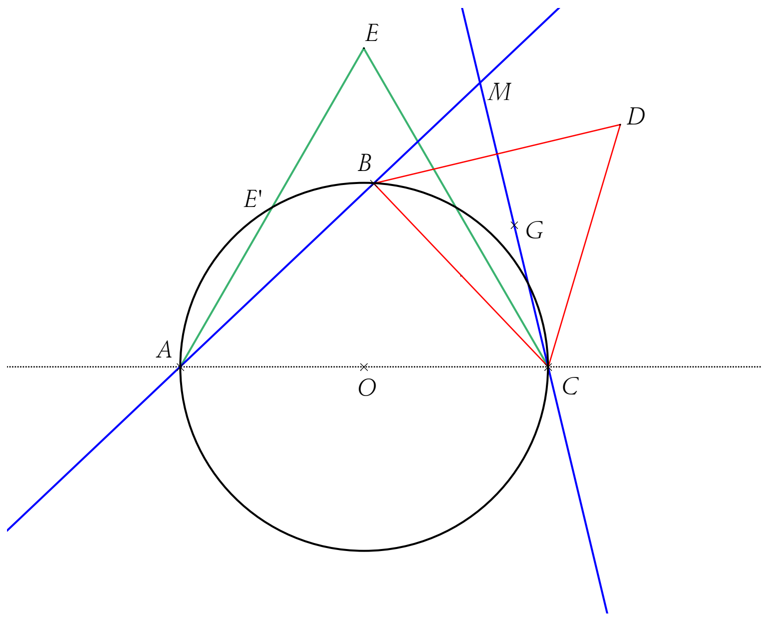


2. $[BC]$ est une corde du cercle Γ donc $OB = OC$; par ailleurs dans un triangle équilatéral le centre de gravité et le troisième sommet sont sur la médiatrice, ici sur celle de $[BC]$. (GC) est la médiatrice de $[BD]$; par ailleurs on a $\widehat{ABC}=90°$, $\widehat{BCG}=30°$, $\widehat{GBD}=30°$ d'où $\widehat{DBM}=180-90-30-30=30°$, moralité M est le symétrique de G par rapport à $[BD]$ et $GM = CG$.

3. On regarde les images par $s:\begin{cases} C\to C \\ B\to M\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{CM}{CB}=2\dfrac{CG}{CB}=2\dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \theta=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CM}\right)=-\dfrac{\pi}{6}(2\pi)\end{cases}$

Partie B

1.



2. $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$: $a = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et angle $\frac{\pi}{6}$. On cherche le centre : $z = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow z\left(1 - \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow z\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow z = 1$, c'est donc C. La réciproque d'une similitude a même centre, un rapport inverse et un angle opposé : c'est bien le cas ici.

3. E est sur l'axe imaginaire, son affixe est $i\sqrt{3}$ (hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2). Son image a pour affixe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}i\sqrt{3} + \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{3i\sqrt{3}-3+1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui a évidemment pour module 1 et est donc sur Γ.

4. Comme $E' = \sigma(E)$, on a $E = s(E')$ puisque s est la réciproque de σ ; comme E' est sur Γ, E est sur Σ.

Lorsque B parcourt Γ, M parcourt le cercle de centre s(O)=O' et de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

On obtient l'affixe de O' « facilement » en écrivant que

$$z_{O'} - z_C = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_0 - z_C) \Leftrightarrow z_{O'} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 1 = -1 + \frac{i}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Celle du centre de gravité de ACE est $\frac{1}{3}(z_A + z_C + z_E) = \frac{1-1+i\sqrt{3}}{3} = \frac{i}{\sqrt{3}}$.

E est un point de Σ et O' son centre, la construction est faite.