

1. Exercice 1 (7 points)

$$f(x) = xe^{-x} \text{ sur } [0; +\infty[.$$

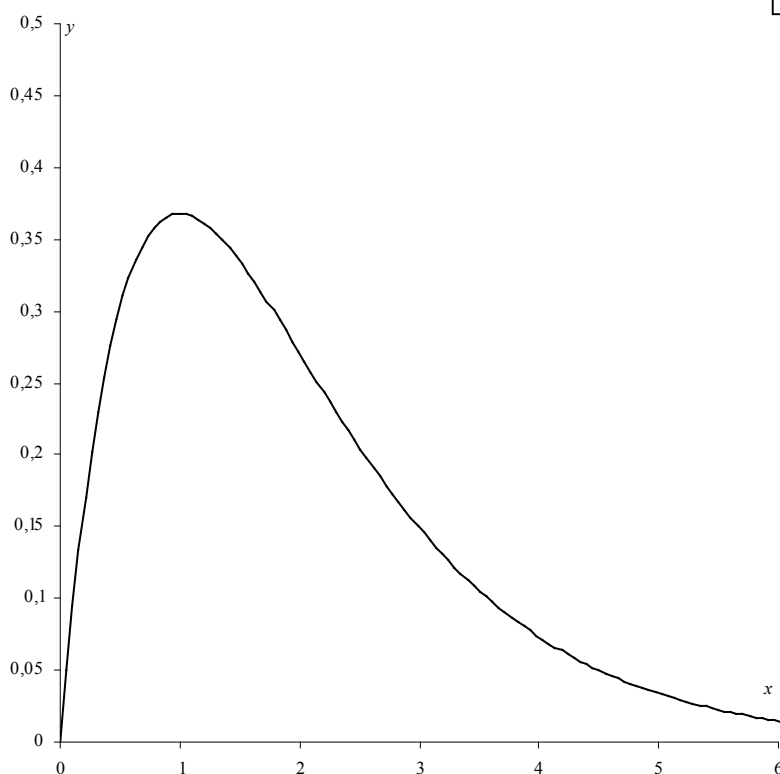
Partie A

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} -Xe^X = 0.$

b. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. L'exponentielle est positive, f' est du signe de $1-x$.

c.

x	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	0	$\nearrow \frac{1}{e} \searrow$	0



2. a. La droite d'équation $y = m$ coupe la courbe Γ en deux points, l'équation $f(x) = m$ a donc bien deux solutions. Plus scientifiquement, lorsque m est dans $]0; \frac{1}{e}[$, il a deux antécédents par f : un antécédent entre 0 et 1 car f est croissante et continue de $]0; 1[$ vers $]0; \frac{1}{e}[$, l'autre entre 1 et $+\infty$ car f est continue, monotone, décroissante de $]1; +\infty[$ vers $]0; \frac{1}{e}[$.

b. On cherche quand $f(x)$ encadre $1/4$: $f(0,3573) = 0,2499$ et $f(0,3574) = 0,25001$.

c. $f(x) = 0$ a l'unique solution 0 (tableau de variation) et $f(x) = \frac{1}{e}$ a pour unique solution 1.

Partie B $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

a. Comme $u_0 = \alpha > 0$ et que si $u_n > 0$ alors $u_n e^{-u_n} > 0$, il est clair que $u_n > 0$ pour tout n .

b. On peut faire $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n (e^{-u_n} - 1)$; or $u_n > 0 \Leftrightarrow -u_n < 0 \Leftrightarrow e^{-u_n} < 1 \Leftrightarrow e^{-u_n} - 1 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

c. (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Soit l sa limite, on a

$$l e^{-l} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ e^{-l} = 1 \Leftrightarrow -l = 0 \end{cases}; \text{ la seule possibilité est que } l = 0.$$

2. $w_n = \ln u_n$.

a. Prenons le logarithme de $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \Leftrightarrow \ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} = \ln u_n - u_n \Leftrightarrow w_{n+1} = w_n - u_n$, soit $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b. $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = w_0 - w_1 + w_1 - w_2 + \dots + w_{n-1} - w_n + w_n - w_{n+1} = w_0 - w_{n+1}$.

c. Comme u_n tend vers 0, w_n tend vers $-\infty$, donc S_n tend vers $+\infty$.

3. En fait à partir de $u_0 = \alpha$ on a $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$; mais $f(\beta) = \frac{1}{4}$, donc si l'on prend $v_0 = \beta$, à partir du rang 1 les deux suites seront confondues.

2. Exercice 2 (3 points)

1. (E) $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ et $y(0) = e$: $f(x) = C e^{-x}$ et $f(0) = C e^0 = C = e$ donc $f(x) = e e^{-x} = e^{1-x}$.

2. $e^{1-x} = t \Leftrightarrow 1-x = \ln t \Leftrightarrow x = 1 - \ln t$ (on a ainsi la fonction réciproque de f : $f^{-1}(t) = 1 - \ln t$).

3. $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$: on pose $u = (1 - \ln t)^2$, $v' = 1$, d'où $u' = 2 \left(-\frac{1}{t}\right) (1 - \ln t)$ et $v = t$:

$$V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt = \pi \left[t(1 - \ln t)^2 \right]_1^e + 2\pi \int_1^e 1 - \ln t dt = 0 - \pi + 2\pi \int_1^e 1 - \ln t dt;$$

on pose $u = 1 - \ln t$, $v' = 1$, d'où $u' = -\frac{1}{t}$ et $v = t$: $\int_1^e 1 - \ln t dt = \left[t(1 - \ln t) \right]_1^e - \int_1^e -1 dt = -1 + (e - 1) = e - 2$ et enfin $V = -\pi + 2\pi e - 4\pi = \pi(2e - 5) \approx 1,37$.

Remarque: on voit sur la figure que le volume en question est quasiment celui d'un cône de base un cercle de rayon 1 et de hauteur 1,5. Comme le volume d'un cône est $\frac{1}{3} \pi R^2 h$, on a bien environ 1,5.

3. Exercice 3 (5 points)

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne: il y a $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ tirages possibles.

« On n'a obtenu aucune boule noire » revient à dire que l'on a tiré deux rouges parmi 4, il y a $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ et la probabilité est $p(A_0) = \frac{6}{15}$;

de même « on a obtenu une seule boule noire » revient à dire qu'on a tiré une noire parmi 2 et une rouge parmi 4, il y a $\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} = 8$ manières de procéder, ce qui donne $p(A_1) = \frac{8}{15}$; comme la seule possibilité restante est de tirer 2 noires, on a $p(A_2) = 1 - p(\bar{A}_2) = 1 - \left(\frac{6}{15} + \frac{8}{15} \right) = \frac{1}{15}$.

2. a. Lors de ce deuxième tirage on a $\binom{4}{2} = 6$ tirages possibles.

Si on a tiré 0 noire au 1^{er} tirage, on a tiré 2 rouges ; il reste donc 2 rouges et 2 noires dans la boîte et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 2, soit $p_{A_0}(B_0) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{1}{6}$;

si on a tiré 1 noire au 1^{er} tirage, on a tiré également 1 rouge ; il reste donc 3 rouges et 1 noire dans la boîte et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 3, soit $p_{A_1}(B_0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{3}{6}$;

si on a tiré 2 noires au 1^{er} tirage, on a tiré 0 rouge ; il reste donc 4 rouges et 0 noire dans la boîte et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 4, soit $p_{A_2}(B_0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{6}{6} = 1$ (en fait c'était évident... puisqu'il n'y a plus que des rouges).

b. avec les probabilités totales on a $p(B_0) = p(B_0 \cap A_0) + p(B_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_2)$, soit

$$p(B_0) = p_{A_0}(B_0)p(A_0) + p_{A_1}(B_0)p(A_1) + p_{A_2}(B_0)p(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{15} + \frac{3}{6} \cdot \frac{8}{15} + \frac{6}{6} \cdot \frac{1}{15} = \frac{6}{15}.$$

c. De la même manière on a

$$p_{A_0}(B_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}\binom{2}{1}} = \frac{4}{6}, \quad p_{A_1}(B_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{1}\binom{1}{1}} = \frac{3}{6}, \quad p_{A_2}(B_1) = 0 ;$$

$$p(B_1) = p_{A_0}(B_1)p(A_0) + p_{A_1}(B_1)p(A_1) + p_{A_2}(B_1)p(A_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{15} + \frac{3}{6} \cdot \frac{8}{15} + 0 \cdot \frac{1}{15} = \frac{8}{15} ;$$

$$p_{A_0}(B_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{1}{6}, \quad p_{A_1}(B_2) = 0, \quad p_{A_2}(B_2) = 0 ;$$

$$p(B_2) = p_{A_0}(B_2)p(A_0) + p_{A_1}(B_2)p(A_1) + p_{A_2}(B_2)p(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{15} + 0 \cdot \frac{8}{15} + 0 \cdot \frac{1}{15} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage, on connaît donc B_1 . Nous cherchons alors

$$p_{B_1}(A_1) = \frac{p(A_1 \cap B_1)}{p(B_1)} = \frac{p_{A_1}(B_1)p(A_1)}{p(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{2}.$$

$$3. \quad p(R) = p(A_0 \cap B_2) + p(A_1 \cap B_1) = p(A_0)p_{A_0}(B_2) + p(A_1)p_{A_1}(B_1), \text{ soit } p(R) = \frac{6}{15} \cdot \frac{1}{6} + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Partie A

$$a = 5 + 5i, \quad b = 1 + 3i \text{ et } c = 8 - 4i.$$

1. $\Omega(5)$; $\Omega A = |5+5i-5| = 5$, $\Omega B = |1+3i-5| = |-4+3i| = \sqrt{16+9} = 5$ et $\Omega C = |8-4i-5| = |3-4i| = 5$ donc A, B et C sont des points du cercle Γ .

2. On vérifie par exemple que D est sur BC , soit que \overrightarrow{BD} est colinéaire à \overrightarrow{BC} :
 $\det(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 2-1 & 8-1 \\ 2-3 & -4-3 \end{vmatrix} = -7+7=0$ et que \overrightarrow{OD} est orthogonal à \overrightarrow{BC} : $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix} = 14-14=0$.

Partie B $z' = \frac{20}{\bar{z}}$.

1. On peut écrire $z' = \frac{20}{\bar{z}} = \frac{20z}{\bar{z}z} \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{20}{OM^2} \overrightarrow{OM}$, ce qui montre que les points O, M et M' sont alignés.

2. a. M a pour affixe $z = 2+iy$ donc $z + \bar{z} = 2+iy + 2-iy = 4$.

b. $z' + \bar{z}' = \frac{20}{\bar{z}} + \frac{20}{z} = \frac{20}{\bar{z}} + \frac{20}{z} = \frac{20(z+\bar{z})}{\bar{z}z} = \frac{80}{\bar{z}z}$; on a donc $5(z' + \bar{z}') = \frac{400}{\bar{z}z} = \frac{20}{\bar{z}} \cdot \frac{20}{z} = z' \bar{z}'$.

c. Il est clair que M' est sur (OM) puisque O, M et M' sont alignés. Il reste à montrer que M' est sur Γ , soit que

$$|z'-5| = 5 \Leftrightarrow (z'-5)(\overline{z'-5}) = 25 \Leftrightarrow (z'-5)(\bar{z}'-5) = 25 \Leftrightarrow z'\bar{z}' - 5(z'+\bar{z}') + 25 = 25 \Leftrightarrow z'\bar{z}' = 5(z'+\bar{z}')$$

C'est bon.