# France métropolitaine

## 1. Exercice 1 (4 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel $n$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?

3. Conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

## 2. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul $k$ et pour tout entier naturel $x$ :

$$(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = x^k - 1 \ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier $a$ supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit $n$ un entier naturel non nul et $d$ un diviseur positif de $n$ : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels non nuls et $d$ leur PGCD.

a. On définit $m'$ et $n'$ par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à $m'$ et $n'$, montrer qu'il existe des entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $mu - nv = d$.

b. On suppose $u$ et $v$ strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

## 3. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $i$ désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.

2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.

a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de 1. une solution de (E') : $z^3 = -8i$.

4. On considère le point $A$ d'affixe $2i$ et la rotation $r$ de centre $O$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe $b$ du point $B$, image de $A$ par $r$, ainsi que l'affixe $c$ du point $C$, image de $B$ par $r$.

b. Montrer que $b$ et $c$ sont solutions de (E').

5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points $A$, $B$ et $C$.

b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

## *4. Exercice 3 (5 points)*

*Pour chaque question une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 1/2 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le point $S(1\,;\,-2\,;\,0)$ et le plan $P$ d'équation $x+y-3z+4=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite $D$ passant par le point $S$ et perpendiculaire au plan $P$ est :

$$\text{A : }\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=-3\end{cases}\quad \text{B : }\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=1-3t\end{cases}\quad \text{C : }\begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=3t\end{cases}\quad \text{D : }\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-3-3t\end{cases}\quad (t\text{ réel}).$$

2. Les coordonnées du point d'intersection $H$ de la droite $D$ avec le plan $P$ sont :

A : $(-4\,;\,0\,;\,0)$ B : $\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$ C : $\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$ D : $\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3. La distance du point $S$ au plan $P$ est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ C : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ D : $\frac{9}{11}$

4. On considère la sphère de centre $S$ et de rayon 3. L'intersection de la sphère $S$ et du plan $P$ est égale :

A : au point $I(1\,;\,-5\,;\,0)$. B : au cercle de centre $H$ et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$.

C : au cercle de centre $S$ et de rayon 2. D : au cercle de centre $H$ et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$.

## *5. Exercice 4 (6 points)*

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité $p$ de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ : la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de $t$ semaines est $p([0\,;t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[)=0,5$.

1. Montrer que $\lambda=\frac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne $d_m$ de ces composants est la limite quand $A$ tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx=\frac{-\lambda A e^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$.

b. En déduire $d_m$ ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2 de spécialité