

Baccalauréat**Correction****Pondichéry****1. Exercice 1 (3 points)**

1. a. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2-1/2} = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{1}{2-2/3} = \frac{3}{4}$.

b. On voit facilement que les termes de u_n sont ceux de $w_n = \frac{n}{n+1}$.

c. Par récurrence (ainsi que demandé) ; on vérifie au rang 0 : $u_0 = 0$, $w_n = \frac{0}{1} = 0$, ok.

Supposons alors que $u_n = w_n$ et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: ceci est équivalent à $\frac{1}{2-u_n} = \frac{n+1}{n+2}$, soit

$$2 - u_n = \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = 2 - \frac{n+2}{n+1} = \frac{2n+2-n-2}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \text{ Tout va bien.}$$

2. a. $v_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, $v_2 = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$, $v_3 = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

On peut utiliser $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$ ou bien

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b : v_1 + v_2 + v_3 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \ln \frac{1}{4} = -\ln 4.$$

De toutes manières ceci montre la méthode à utiliser pour la dernière question.

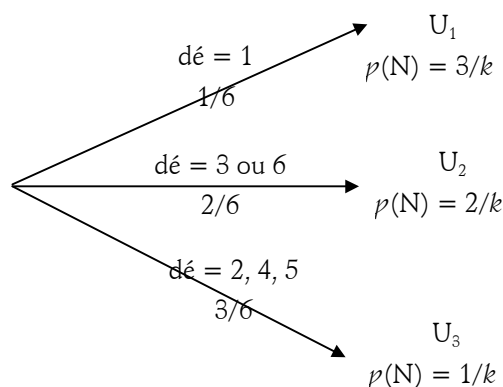
b. $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{n-1}{n} + \ln \frac{n}{n+1}$,

soit $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln(n-1) - \ln n + \ln n - \ln(n+1)$.

Tous les termes intermédiaires disparaissent ; on a donc $S_n = -\ln(n+1)$ qui tend évidemment vers $-\infty$.

2. Exercice 2 (4 points)

On fait un arbre qui donne toutes les réponses immédiatement :



1. a. Pour avoir une boule noire il faut calculer la probabilité d'avoir tiré 1 avec le dé et une noire dans U_1 , etc., soit sous forme de probabilité conditionnelle :

$$p(N) = p[(A \cap N) \cup (B \cap N) \cup (C \cap N)] = p(A)p_{U_1}(N) + p(B)p_{U_2}(N) + p(C)p_{U_3}(N).$$

Ceci donne évidemment $p(N) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{k} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{k} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{k} = \frac{10}{6k} = \frac{5}{3k}$.

b. On cherche ici $P_N(dé = 1) = \frac{p(A \cap N)}{p(N)} = \frac{1/2k}{5/3k} = \frac{3}{10}$.

c. $\frac{5}{3k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3k < 10 \Leftrightarrow k < \frac{10}{3}$; comme k est entier et supérieur ou égal à 3, il reste $k = 3$.

d. $\frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow 3k = 150 \Leftrightarrow k = 50$.

2. Le nombre de fois où on tire une boule noire sur les 20 parties suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{30}$. La probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est donc

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} \left(\frac{1}{30}\right)^0 \left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} \approx 0,492.$$

3. Exercice 3 (8 points)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

x	$-\infty$	0	1	α	$+$
φ'	-	0	+	0	-
φ	$+\infty$	0	$\frac{3}{e} - 1$	0	-1

1. a. En $-\infty$ la fonction se comporte comme $x^n e^x$ en $+\infty$, sa limite est donc $+\infty$. En $+\infty$ elle se comporte comme $x^n e^x$ en $-\infty$ ce qui donne $0 - 1 = 0$.

b. $\varphi'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2+x+1)e^{-x} = (x-x^2)e^{-x} = x(1-x)e^{-x}$. On fait éventuellement un tableau de signes pour $x(1-x)$ ou on se rappelle du signe du trinôme ; l'exponentielle est toujours > 0 .

2. La fonction φ s'annule évidemment en 0 et comme $\varphi(0) = 0$ elle reste positive de $-\infty$ jusqu'à 1. De 1 à $+\infty$ elle est continue, monotone strictement décroissante vers $\left[-1; \frac{3}{e} - 1\right]$; comme $\frac{3}{e} - 1 > 0$, 0 appartient à l'intervalle image φ s'annule donc bien sur $[1; +\infty[$.

A la calculatrice on trouve $\varphi(1,78) \approx 0,003$ et $\varphi(1,79) \approx -0,0008$.

3. On a dit que φ était positive jusqu'à 1 ; après comme φ est décroissante, si $x \leq \alpha$ alors $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha) = 0$ et si $x \geq \alpha$, $\varphi(x) \leq \varphi(\alpha) = 0$.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire.

$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

1. Même tangente = passent par le même point A et en cet endroit ont même nombre dérivé. Il faut donc calculer f' et g' . Il est immédiat que $f(0) = g(0) = 1$

$$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (2x+1)e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 1 ; g'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow g'(0) = 1.$$

$$2. a. f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1) \left(e^{-x} - \frac{1}{x^2+x+1} \right) = \frac{(2x+1)[(x^2+x+1)e^{-x} - 1]}{x^2+x+1}.$$

b. Par rapport au signe de φ il faut faire intervenir celui de $2x+1$ et celui de x^2+x+1 ; or ce trinôme a un discriminant négatif, il est toujours du signe de 1, soit > 0 .

c. Lorsque $f - g$ est positive, C_f est au dessus de C_g , c'est donc lorsque $x \in \left[-\frac{1}{2}; \alpha \right]$. Ailleurs C_f est en dessous de C_g .

x	$-\infty$	$-1/2$	0	α	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\varphi(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$3. a. h'(x) = -2e^{-x} - (-2x-3)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x) - g(x).$$

N'oubliez pas que la dérivée de $\ln u$ est u'/u ...

b. Attention quand même au signe : sur $\left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$ on a bien $f(x)$ supérieur à $g(x)$, on calcule donc

$$\text{simplement } \int_{-1/2}^0 f(x) - g(x) dx = [h(x)]_{-1/2}^0 = h(0) - h(-1/2) = -3 + 2\sqrt{e} + \ln(3/4) \approx 0,0098 \text{ en unités d'aire.}$$

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

$$A. 1. z^2 - 2z + 4 = 0 : \Delta = -12 = (2i\sqrt{3})^2 \text{ d'où } z' = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}, z'' = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1-i\sqrt{3}.$$

Pour la forme expo. inutile de chercher midi à quatorze heures : on sait que $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a donc

$$\text{immédiatement } z' = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} ; z'' \text{ est le conjugué de } z', \text{ donc } z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

2. Faire $(z')^{2004}$ en terme d'angle revient à tourner 2004 fois de $\pi/3$ sur le cercle trigo ; or $2004 = 3 \times 668$, on fait donc 668 demi-tours ou encore 334 tours complets. On revient donc au point de départ qui est 1. Au final $(z')^{2004} = 2^{2004} e^{i0} = 2^{2004}$.

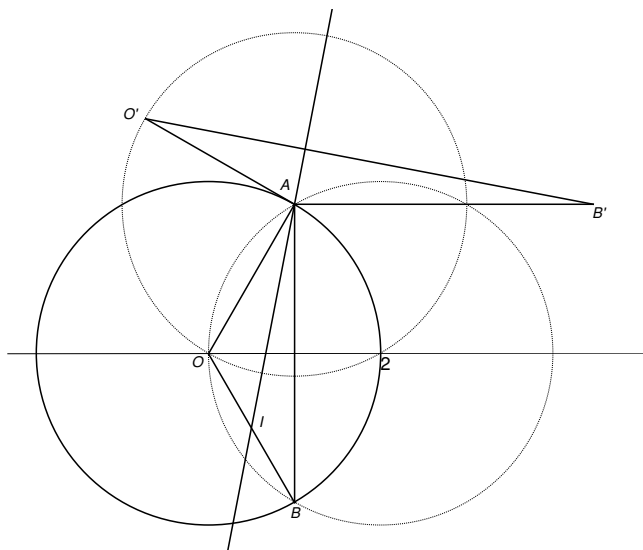
B. 1. Avec la forme exponentielle les deux racines ayant même module 2, elles sont sur le cercle de centre 0 de rayon 2.

2. On rappelle que $r_{(\Omega, \alpha)} : z \rightarrow z' / z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$; appliquons ici (on se rappelle que $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$) :

$$z_{O'} - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(0 - z_A) \Leftrightarrow z_{O'} = 1 + i\sqrt{3} - i(-1 - i\sqrt{3}) = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) ;$$

$$z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A) \Leftrightarrow z_{B'} = 1 + i\sqrt{3} + i(1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}) = (1 + 2\sqrt{3}) + i\sqrt{3}.$$

3. a. I a pour affixe $z_I = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il semblerait que (AI) soit une hauteur du triangle $(AO'B')$.



b. & c. Pour le montrer il suffit de vérifier que les vecteurs \overrightarrow{AI} et $\overrightarrow{O'B'}$ sont orthogonaux, soit avec le produit scalaire soit avec l'argument. Nous faisons les deux.

$$z_{\overrightarrow{AI}} = 1 + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad z_{\overrightarrow{O'B'}} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - i.$$

$$\text{Avec le p.s. : } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{O'B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 ;$$

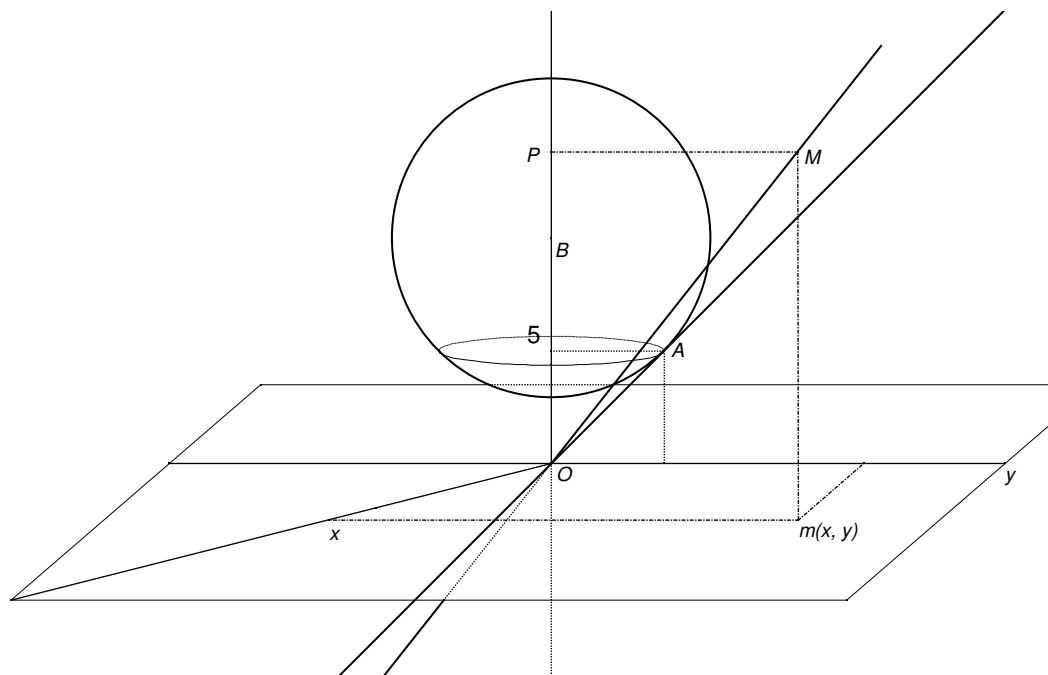
avec l'argument :

$$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{O'B'}) = \arg \frac{3\sqrt{3} - i}{\frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \arg 2 \frac{3\sqrt{3} - i}{1 + i3\sqrt{3}} = \arg 2 \frac{(3\sqrt{3} - i)i}{(1 + i3\sqrt{3})i} = \arg 2i \frac{3\sqrt{3} - i}{i - 3\sqrt{3}} = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

$A(0 ; 5 ; 5)$; $B(0 ; 0 ; 10)$.

Il vaut mieux se faire un petit schéma pour voir ce qui se passe.



1. La droite (OA) est tangente à (C) si (AB) est orthogonale à (OA) : Pythagore ou le p.s. Avec Pythagore : $AB^2 = 0^2 + 5^2 + 5^2 = 50$, $OB^2 = 100$ et $OA^2 = 5^2 + 5^2 = 50$. Pas de problème.

2. a. (Γ) est défini alors comme l'ensemble des points de l'espace tels que le triangle OMP soit rectangle ; par ailleurs avec Thalès on a :

$$\frac{MP}{5} = \frac{OM}{5\sqrt{2}} = \frac{OP}{5} \Rightarrow 2MP^2 = OM^2 \Leftrightarrow 2Om^2 = OM^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ d'où } x^2 + y^2 = z^2.$$

b. Comme les génératrices du cône sont tangentes à la sphère elles passent toutes par un point du cercle horizontal de centre $(0 ; 0 ; 5)$ et de rayon 5. On peut le faire analytiquement :

$$(S) \text{ a pour équation : } x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 50 \text{ d'où en intersectant avec le cône : } \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z^2 + (z-10)^2 = 50 \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $2z^2 - 20z + 50 = 0$, soit $z^2 - 10z + 25 = 0 \Leftrightarrow (z-5)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 5$.

$$\text{Notre intersection est donc caractérisée par } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases}.$$

La première équation donne un cercle d'un plan horizontal, la deuxième l'altitude de ce plan.

3. Le plan $x = 1$ est un plan vertical parallèle à $(O ; \vec{j}, \vec{k})$; son intersection avec le cône ne sera sûrement pas un cercle. Faisons $x = 1$ dans l'équation du cône : $1 + y^2 = z^2$, ce qui donne $z = \pm\sqrt{1+y^2}$, soit des hyperboles (tracez à la calculatrice pour voir).

4. Supposons que x et y soient simultanément impairs : on a $x = 2p+1, y = 2q+1$ d'où en remplaçant :

$$4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = z^2 \Leftrightarrow z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2 \Leftrightarrow z^2 \equiv 2(4).$$

Est-il possible de trouver un nombre qui élevé au carré donne un reste de 2 modulo 4 ? Si ce nombre est pair son carré sera congru à 0 modulo 4, s'il est impair ce sera à 1 modulo 4 ; x et y ne peuvent donc être impairs ensemble.