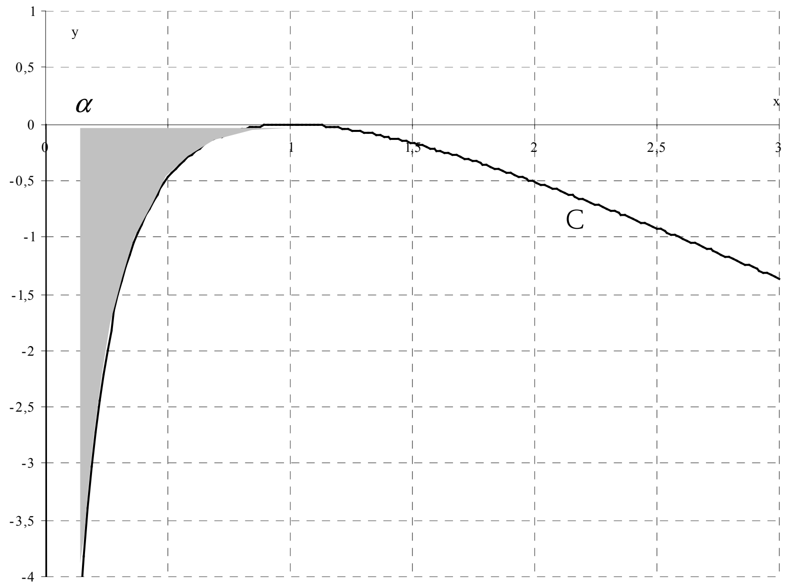
Baccalauréat session de remplacement Polynésie

1. Exercice 1 (9 points)

La courbe C donné ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur]0 ; +∞ [par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$.



1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ est du signe de $N(x)=-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]$.

b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0<x<1$ et $x>1$.

c. En déduire le sens de variation de f sur]0 ; +∞ [et les coordonnées du point de C d'ordonnée maximale.

2. On note $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de]0 ; 1[.

a. Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de [1 ; 2] et :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1.$$

a. Démontrer, pour tout réel x élément de [1 ; 2], la double inégalité : $0\le\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\le 1$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à [1 ; 2].

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.

b. Déterminer la valeur exacte de l.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives $z'=z-2$ et $z''=z^2$.

1. a. Déterminer les points M pour lesquels $M''=M$.

b. Déterminer les points M pour lesquels $M''=M'$.

2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M_1', M_1'', M_2', M_2'' appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.

3. On pose $z=x+iy$ où x et y sont des nombres réels.

a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z''-z}{z'-z}$.

b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.

4. On pose $z=e^{i\theta}$ où $\theta\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M.

b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente.

c. Dans cette question $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ, et les points M_3', M_3'' associés. Montrer que le triangle $M_3M_3'M_3''$ est rectangle. Est-il isocèle ?

3. Exercice 2 (5 points, spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}-1+i(1+\sqrt{2}).$$

a. Calculer les affixes des points $A'=f(A)$ et $C'=f(C)$.

b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.

c. Placer les points A, B et C puis construire le point $B'=f(B)$.

2. a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Montrer que la composée $g=f\circ h$ a pour écriture complexe $z''=(1+i)\bar{z}-1+3i$.

3. a. Soit M_0 le point d'affixe $2-4i$. Déterminer l'affixe du point $M_0''=g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $5x+3y=-2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M, dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\,;6]$, tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Correction

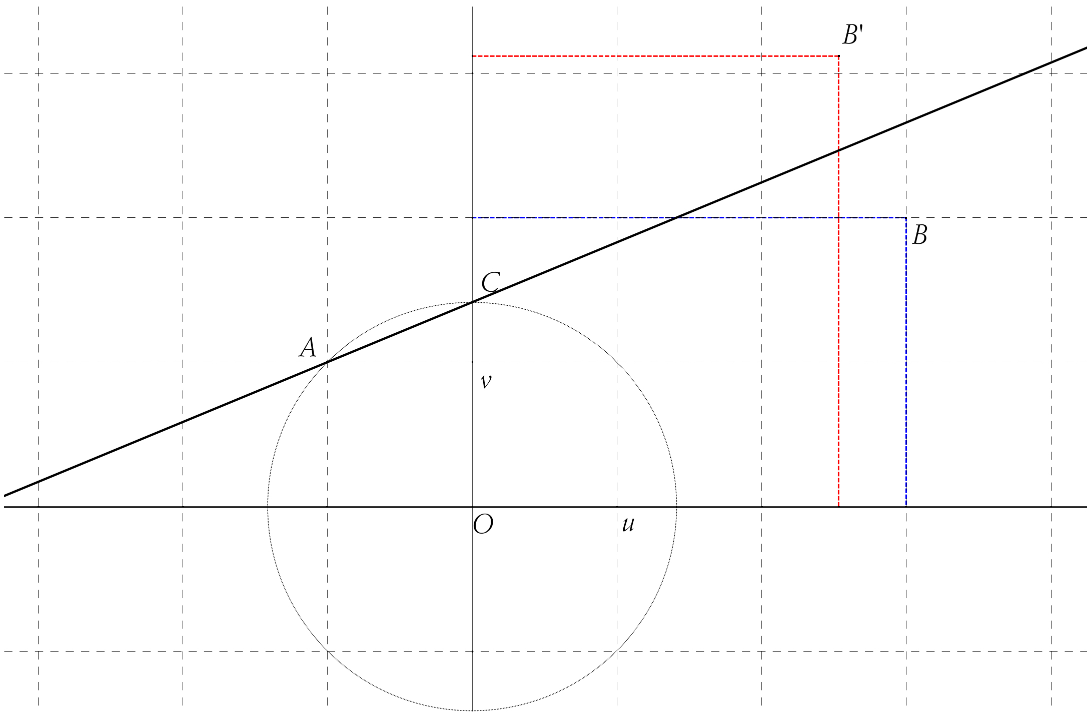
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. a. $z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}-1+i(1+\sqrt{2})$: $a'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)-1+i(1+\sqrt{2})=-i\sqrt{2}-1+i+i\sqrt{2}=-1+i$,

$c'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-i\sqrt{2})-1+i(1+\sqrt{2})=-i+1-1+i+i\sqrt{2}=i\sqrt{2}$.

b. On a $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right|=1$ donc f est une isométrie. Par ailleurs les deux points A et C sont invariants donc f est une réflexion d'axe (AC).

c.



2. a. $h: z\to z'/\, z'-a=\sqrt{2}(z-a) \Leftrightarrow z'=\sqrt{2}z+a(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}z+(-1+i)(1-\sqrt{2})$

b. $g=f\circ h=z\xrightarrow{h}z'\xrightarrow{f}z''=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}'-1+i(1-\sqrt{2})=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{\sqrt{2}z+(-1+i)(1-\sqrt{2})}-1+i(1+\sqrt{2})$, soit

$z''=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\bar{z}+(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right)\right]-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)=(1+i)\bar{z}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right)-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$;

il reste à simplifier :

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right)-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)=-i\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)=-1+i\left(-\sqrt{2}+2+1+\sqrt{2}\right),$$

soit finalement $z''=(1+i)\overline{z}-1+3i$.

3. a. $z_0=2-4i \to z''_0=(1+i)(2+4i)-1+3i=-3+9i$; $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a=3+2i+1-i=4+i$ et $\overrightarrow{AM''_0}$ a pour affixe $z''_0-a=-3+9i+1-i=-2+8i$; avec le produit scalaire on a : $4.(-2)+1.8=-8+8=0$, les vecteurs sont orthogonaux.

b. $z=x+iy \to z''=(1+i)(x-iy)-1+3i=x+y-1+i(x-y+3) \Rightarrow z''-a=x+y+i(x-y+2)$;

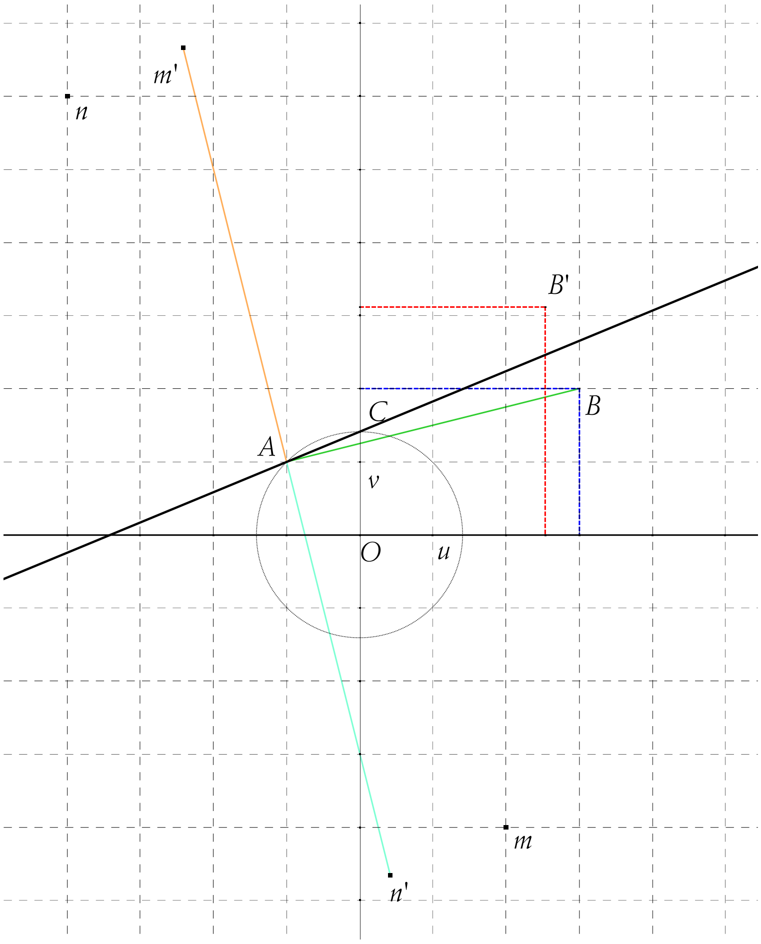
le produit scalaire donne $4(x+y)+1(x-y+2)=5x+3y+2$ et est nul lorsque $5x+3y=-2$.

c. On a une solution évidente : $x=2$, $y=-4$; soustrayons :

$$\begin{cases}5x+3y=-2\\5.2+3(-4)=-2\end{cases} \Rightarrow 5(x-2)+3(y+4)=0 \Leftrightarrow 5(2-x)=3(y+4) \Leftrightarrow \begin{cases}2-x=3k\\y+4=5k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-3k\\y=-4+5k\end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$$

d. $$\begin{cases}-6\le x\le 6\\-6\le y\le 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6\le 2-3k\le 6\\-6\le -4+5k\le 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-8\le -3k\le 4\\-2\le 5k\le 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{4}{3}\le k\le \frac{8}{3}\\-\frac{2}{5}\le k\le \frac{10}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-1,0,1,2\\k=0,1,2\end{cases} \Leftrightarrow k=0,1,2.$$

Il y a trois points seulement : m $(2\,;-4)$, A $(-1\,;1)$ et n $(-4\,;6)$.



4. Exercice 3 (6 points)

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3. Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Jusitifier que les points pondérés $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;4)$ admettent un barycentre. On note G ce barycentre.

2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « G appartient à la droite (BC) » ;

E_2 : « G appartient au segment $[BC]$ ».

b. Montrer que la probabilité de l'événement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\frac{2}{5}$ (on pourra faire appel à des considérations de signe).

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre de la question 1. On désigne par X la varaiable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3.

a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.