Amérique du Sud Remplacement

1. Exercice 1 (7 points)

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.

c. construire Γ.

2. a. Montrer que pour tout réel *m* de l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

b. Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions, (avec $\alpha < \beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2. b.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0, $v_0 > 0$, et pour tout entier *n*, par $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$. Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$? Si oui, préciser laquelle.

2. Exercice 2 (3 points)

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction *f*, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

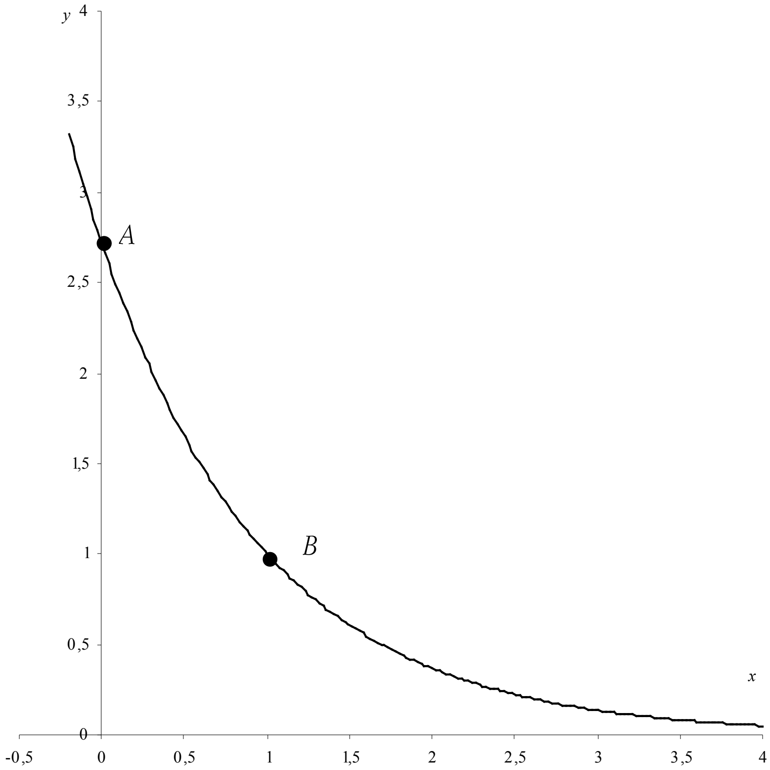
$$\text{(E)}\quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad y(0) = e.$$

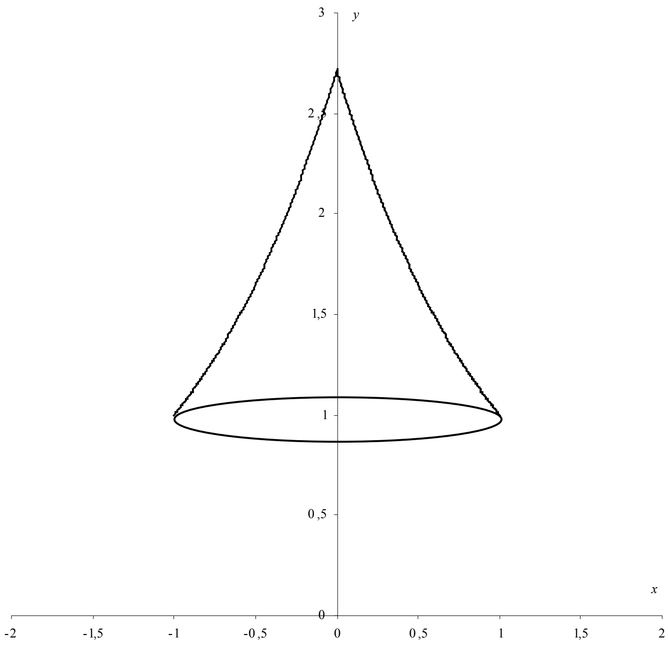
1. Déterminer $f(x)$ pour tout *x* réel.

2. Soit *t* un réel donné de l'intervalle $[1\,;e]$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue *x*.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ comme représenté sur la deuxième figure. On note V son volume et on admet que $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 \, dt$.

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.





3. *Exercice 3 (5 points, énoncé légèrement modifié par moi-même)*

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0)=\dfrac{6}{15}$ et $p(A_1)=\dfrac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2. Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$, $p_{A_2}(B_0)$.

b. Calculer $p(B_0)$.

c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R)=\dfrac{1}{3}$.

4. *Exercice 4 (5 points, non spécialistes)*

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$. On désigne par Ω le centre de Γ.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c où $a=5+5i$, $b=1+3i$ et $c=8-4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.

2. Soit D le point d'affixe $2+2i$. Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B (On rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$).

A tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{20}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ représente le nombre conjugué de z.

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z. On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M.

a. Vérifiez que $z+\bar{z}=4$.

b. Exprimez $z'+\bar{z}'$ en fonction de z et $\bar{z}$ et en déduire que $5(z'+\bar{z}')=z'\bar{z}'$.

c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ. Placer M' sur la figure.