

Polynésie

1. Exercice 1 (4 points)

4 points

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$).

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

a. Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

c. Calculer l'afixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

d. Soit D le barycentre du système $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$; calculer l'afixe z_D du point D .

e. Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$.

a. Montrer que B appartient à Γ_2 .

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 .

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 3 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$a = 3, \quad b = 1 + \frac{2}{3}i, \quad c = 3i \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{3}i.$$

1. Représenter les points A, B, C et D .
2. Déterminer l'angle α et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D .
3. Donner l'écriture complexe de s . En déduire l'affixe du centre I de s .
4. Soit M le point de coordonnées $(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par s .

Montrer que :
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}.$$

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant $\begin{cases} M_0 = A \\ M_{n+1} = s(M_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

On note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

- a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $IM_k \leq 10^{-3}$.

4. Exercice 3 (7 points)

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par : $f_k(x) = x + \frac{1 - ke^x}{1 + ke^x}$.

- a. Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : 2y' = (y - x)^2 + 1.$$

- b. En déduire le sens de variations de f_k sur \mathbb{R} .

2. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k .

Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées $(1; 1)$.

3. On remarque que, pour tout x réel, on a : $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + ke^x}$ (1) et $f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1 + ke^x}$ (2).

En déduire pour tout k strictement positif :

- la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' ;
- les asymptotes de la courbe C_k .

4. Cas particulier : $k = 1$.

- a. Justifier que f_1 est impaire.

- b. Soit la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x f_1(t) dt$. Interpréter graphiquement le réel $F(x)$ dans les deux cas : $x > 0$ et $x < 0$. Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

- c. Déterminer les variations de F sur \mathbb{R} .

- d. En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement $F(x)$.

5. Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (I_n) , $n \in \mathbb{N}$, définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1 + n + t} dt$.

1. a. Déterminer le sens de variation de cette suite.

b. Montrer que (I_n) , est une suite positive.

c. Montrer que pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a $\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$.

a. Étudier le sens de variation et le signe de f .

b. En déduire le sens de variation de g sur $[0 ; 1]$.

c. Établir, pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$, l'encadrement : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0 ; 1]$.

e. Établir l'encadrement : $\frac{2}{3(n+2)} \leq I_n \leq \frac{23}{30(n+1)}$.

f. Donner une valeur de p telle que $I_p \leq 10^{-2}$.

Annexe

